

Obliczanie pierwiastka kwadratowego metodą Newtona-Raphsona

W przypadku pisania programów z elementami matematycznymi programista dostaje do dyspozycji zestaw bibliotek matematycznych zawierających typowe funkcje matematyczne. Na dodatek funkcje te często wykorzystują koprocessor matematyczny w procesorze co znacząco zwiększa szybkość wykonywanych obliczeń. Mogą się jednak zdarzyć takie przypadki, gdzie programista będzie musiał sam opracować zestaw funkcji, które pozwalają na szybkie wykonywanie obliczeń matematycznych (obliczenia z bardzo dużą dokładnością). W takim przypadku najlepiej użyć gotowych i efektywnych algorytmów realizujących poszczególne funkcje matematyczne.

Przykładem takiego algorytmu jest obliczanie pierwiastka kwadratowego metodą Newtona-Raphsona. Pozwala on na szybkie wyliczenie pierwiastka z dużą dokładnością i na dodatek za pomocą podstawowych operacji jak dzielenie i dodawanie.

Sam algorytm jest rekurencyjny. Oznacza to, że pierwiastek jest wyznaczany w pętli wiele razy. Za każdym następnym razem pierwiastek jest obliczony z coraz większą dokładnością. W każdym cyklu pętli przy liczeniu pierwiastka wykorzystuje się wartość poprzednio wyliczonego pierwiastka. Całość można opisać zobrazować następująco:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{a}{2} \\ x_n = \frac{1}{2} \left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}} \right) \end{cases}$$

Przykład.

Obliczamy pierwiastek z 100 (7 kroków):

$$x_1 = 0.5 * a = 0.5 * 100 = 50$$

$$x_2 = 0.5 * (x_1 + a / x_1) = 0.5 * (50 + 100 / 50) = 26$$

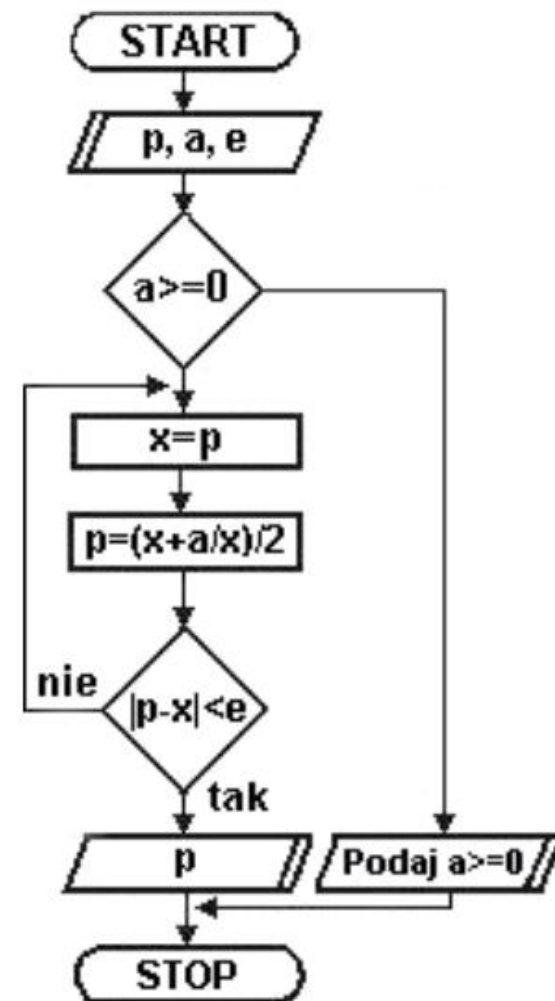
$$x_3 = 0.5 * (x_2 + a / x_2) = 0.5 * (26 + 100 / 26) = 14.92307692$$

$$x_4 = 0.5 * (x_3 + a / x_3) = 0.5 * (14.92307692 + 100 / 14.92307692) = 10.81205393$$

$$x_5 = 0.5 * (x_4 + a / x_4) = 0.5 * (10.81205393 + 100 / 10.81205393) = 10.03049520$$

$$x_6 = 0.5 * (x_5 + a / x_5) = 0.5 * (10.03049520 + 100 / 10.03049520) = 10.00004636$$

$$x_7 = 0.5 * (x_6 + a / x_6) = 0.5 * (10.00004636 + 100 / 10.00004636) = 10.00000000$$



Zad. 1.

Bazując na powyższym przykładzie, napisz program, który obliczy wartość pierwiastka dla dowolnej liczby rzeczywistej z zadaną dokładnością.

Zadanie dodatkowe:

Powyższy program jest wersją iteracyjną algorytmu. Napisz program, który oblicza pierwiastek rekurencyjnie, z zadaną dokładnością.